Hibridación de teorías en el sistema teórico del enfoque ontosemiótico

Hybridisation of theories in the onto-semiotic theoretical system

Ibridazione di teorie nel sistema teorico dell’approccio ontosemiotico[1]

Juan D. Godino
Universidad de Granada, Granada, España

Resumen. *La complejidad de los problemas que plantea la investigación en didáctica de la matemática, situada en el cruce de diversas disciplinas académicas, explica la variedad de teorías que se usan para abordarlos y, por tanto, la necesidad de clarificar, comparar y articular dichas teorías. En este trabajo explico el origen del enfoque ontosemiótico (EOS) como una propuesta de elaboración de un sistema teórico modular e inclusivo para la didáctica de la matemática, con el objetivo de construir un sistema de herramientas necesarias y suficientes para abordar, no solo el problema educativo-instruccional propio de la didáctica, sino también los problemas epistemológicos, ontológicos y psicológicos implicados. En una primera etapa se introdujo la noción de significado pragmático y configuración ontosemiótica mediante las cuales, sobre bases antropológicas y semióticas, se articulan las nociones de conocimiento y saber usados en la didáctica francesa. Tras una breve descripción de las herramientas del EOS, se incluye también una síntesis de diversos trabajos en los cuales se aborda la articulación de dichas herramientas con otros marcos teóricos, indicando la complejidad del problema de hibridación de teorías y la amplitud de las cuestiones pendientes.*

Palabras claves: educación matemática, marcos teóricos, enfoque ontosemiótico, articulación de teorías.

Abstract. *The complexity of the problems posed by research in didactics of mathematics, located at the crossroads of various academic disciplines, explains the variety of theories used to address them and, therefore, the need to clarify, compare and articulate these theories. In this paper, I explain the origin of the onto-semiotic approach (OSA) as a proposal for the elaboration of a modular and inclusive theoretical system for the didactics of mathematics, with the aim of building a system of necessary and sufficient tools to address not only the educational-instructional problem of didactics, but also the epistemological, ontological and psychological*

[1] Artículo invitado/Invited article/Articolo invitato.

problems involved. In a first stage, the notion of pragmatic meaning and onto-semiotic configuration was introduced, by means of which, the notions of knowledge and savoir in the French didactics are articulated using anthropological and semiotic bases. After a brief description of the OSA tools, a synthesis of various publications is also included, in which the articulation of these tools with other theoretical frameworks is addressed, indicating the complexity of the problem of hybridisation of theories and the extent of the outstanding questions.

Keywords: mathematics education, theoretical frameworks, onto-semiotic approach, articulation of theories.

Sunto. *La complessità dei problemi posti dalla ricerca in didattica matematica, situata al crocevia di varie discipline accademiche, spiega la varietà delle teorie utilizzate per affrontarle e, quindi, la necessità di chiarire, confrontare e articolare tali teorie. In questo lavoro spiego l'origine dell'approccio ontosemiotico (AOS) come proposta per l'elaborazione di un sistema teorico modulare e inclusivo per la didattica della matematica, con l'obiettivo di costruire un sistema di strumenti necessari e sufficienti per affrontare, non solo il problema educativo-didattico specifico della didattica, ma anche i problemi epistemologici, ontologici e psicologici coinvolti. In una prima fase è stata introdotta la nozione di significato pragmatico e di configurazione ontosemiotica attraverso la quale, su basi antropologiche e semiotiche, si articolano le nozioni di conoscenza e sapere utilizzate nella didattica francese. Dopo una breve descrizione degli strumenti dell'AOS, si include anche una sintesi di diversi lavori nei quali viene affrontata l'articolazione di questi strumenti con altri quadri teorici, indicando la complessità del problema dell'ibridazione fra teorie e l'ampiezza delle questioni che restano in sospeso.*

Parole chiave: didattica della matematica, quadri teorici, approccio ontosemiotico, articolazione di teorie.

1. Introducción

La articulación de marcos teóricos (*networking theories*) está recibiendo una atención particular por diversos autores (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello 2008; Radford 2008a), quienes consideran que la coexistencia de diversas teorías para explicar los fenómenos de una disciplina como la didáctica de la matemática puede ser, hasta cierto punto, inevitable y enriquecedora, pero al mismo tiempo puede constituir una rémora para su consolidación como un campo científico. Prediger et al. (2008) describen diferentes estrategias y métodos para articular teorías, que van desde ignorarse entre sí, a la unificación global. Desafortunadamente, esas estrategias de integración y síntesis de teorías no se están aplicando a nivel internacional, como se puede ver en el resultado final de uno de los esfuerzos más destacados en esa dirección, como es el libro "*Networking of theories as a research practice in mathematics education*" (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014). Como resalta Ruthven en dicho libro, a pesar de las limitaciones que revela la confrontación de las cinco teorías estudiadas, al entrar en competición cada una de ellas se esfuerza por defender su propia identidad.

Personalmente considero que el progreso en cualquier disciplina, y en particular en didáctica de la matemática, debe tener en cuenta el principio conocido como "navaja de Occam", o principio de parsimonia, economía, o concisión, usado en lógica y resolución de problemas. Este principio afirma que, entre hipótesis competitivas, debería ser seleccionada la hipótesis con menos supuestos En otras palabras, la explicación más simple es usualmente la mejor. La aplicación de la navaja de Occam al campo de la educación matemática justifica los esfuerzos realizados en el campo por comparar, articular y unificar teorías.

Pero también es necesario tener en cuenta la frase atribuida a Einstein: "Todo se debería mantener lo más simple posible, pero no más", que puede considerarse como una formulación del principio conocido como "anti-navaja de Chatton": "Si una explicación no determina satisfactoriamente la verdad de una proposición, y se está seguro de que es verdadera, se debe requerir alguna otra explicación". La existencia de una multiplicidad de teorías en educación matemática es una consecuencia de la aplicación implícita de la anti-navaja de Chatton, mientras que los esfuerzos de comparación, articulación y unificación de teorías es resultado de la aplicación, también implícita, de la navaja de Occam. Parece conveniente reconocer que ambos principios no son contrapuestos y que una posición racional ante la multiplicidad de teorías debe ser explorar la sinergia que pueda haber dichos principios.

Considero necesario tratar de comparar, coordinar e integrar las teorías en un marco que incluya las herramientas necesarias y suficientes, respetando el principio fundamental de parsimonia metodológica. Este problema se puede formular en los siguientes términos:

> *Dadas las teorías T_1, T_2, ... T_n, focalizadas sobre una misma problemática de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ¿es posible elaborar una teoría T que incluya las herramientas necesarias y suficientes para realizar el trabajo de las T_i $(1 \leq i \leq n)$?*

Aunque no sea posible, o incluso deseable, tratar de construir una 'teoría holística que lo explique todo', la educación matemática puede progresar en la construcción de un sistema conceptual coherente y herramientas metodológicas que hagan posible los análisis de nivel macro y micro de las dimensiones epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva e instruccional implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y sus interacciones. Como sugiere Ruthven,

> Esto implica adoptar un punto de vista modular, tanto con respecto a la descomposición de las teorías en componentes de herramientas analíticas y con respecto a la composición de herramientas provenientes de diferentes teorías; mediante la posibilidad de que una teoría tome prestadas herramientas de otra o de la improvisación de nuevos marcos que combinen herramientas de varias

> teorías fuente para abordar un nuevo tipo de cuestión o un tipo antiguo de cuestiones de una nueva manera. (Ruthven, 2014, p. 278)

En este trabajo voy a presentar una síntesis de los análisis y reflexiones sobre distintas teorías usadas en educación matemática que han dado lugar a la emergencia del sistema teórico del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero, & Font, 2019). En Godino (2017) se presenta el EOS como un sistema teórico modular e inclusivo que trata de proporcionar principios y herramientas metodológicas para abordar los problemas epistemológicos, ontológicos, cognitivos, instruccionales y ecológicos inherentes a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se han realizado diversas publicaciones en las cuales se estudian las concordancias y complementariedades entre el EOS y otros marcos teóricos. En este artículo haré una síntesis del trabajo de articulación de teorías que venimos realizando, identificando aspectos que se deben desarrollar.

El artículo incluye los siguientes apartados. Después de esta sección introductoria, en las secciones 2 y 3, abordo la cuestión de cómo se concibe la noción de conocimiento y saber en cuatro teorías de la didáctica francesa, problemática que motivó la emergencia del EOS con el trabajo sobre significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino & Batanero, 1994). Este trabajo y posteriores desarrollos del mismo (Godino, 2002) constituye una primera etapa de articulación de teorías centrada en los problemas epistemológicos, ontológicos y psicológicos en didáctica de las matemáticas. En la sección 4 describo los problemas educativo-instruccionales y de formación de profesores propios de la didáctica y las diferentes herramientas teóricas elaboradas en el marco del EOS para abordarlos. En la sección 5 describo de manera sucinta diversos trabajos de articulación de marcos teóricos desde la perspectiva del EOS como una segunda etapa de hibridación de teorías. Finalizo el artículo con algunas reflexiones sobre la hibridación y competición de marcos teóricos en educación matemática.

2. La cuestión de la unificación de teorías

En este apartado y en el siguiente voy a tratar de argumentar la necesidad y utilidad de articular teorías (internas y locales) sobre educación matemática, usando como ejemplo cuatro teorías bien conocidas en el ámbito de la "didáctica francesa": la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC, Vergnaud, 1990; 2009), la Teoría de los registros de representación semiótica (TRRS, Duval, 1995; 1996), la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD, Brousseau, 1986; 1998) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, Chevallard, 1992; 1999). Las dos primeras centran la atención en la dimensión cognitiva (conocimiento individual o subjetivo) mientras las dos últimas lo hacen básicamente en la dimensión epistémica (conocimiento institucional u objetivo). Consideramos, no obstante, que la consolidación de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecno-científica pasa por abordar cuestiones tales como:

- ¿Cuáles son los problemas, principios y metodologías que se abordan y usan en cada marco teórico?
- ¿Qué redundancias hay en las herramientas de estos marcos? ¿Son incompatibles entre sí?
- ¿Pueden convivir de manera sinérgica las herramientas cognitivas de un marco con las epistémicas de otro?
- ¿Sería útil construir un sistema teórico que tenga en cuenta las diversas dimensiones implicadas (epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica), evitando redundancias? ¿Cuáles serían las nociones primitivas y postulados básicos de dicho nuevo sistema?

Es claro que no podemos abordar aquí estas cuestiones, sino solo mostrar su pertinencia y la potencial utilidad de avanzar hacia un sistema teórico que articule de manera coherente los enfoques epistémicos y cognitivos, con el objetivo de lograr diseños instruccionales efectivos. Con ese fin describo brevemente algunas nociones básicas de estos modelos cuya clarificación, confrontación y articulación podría ser productiva. Solo se mencionan, de manera sucinta, cómo se concibe en estas teorías el *conocimiento*, desde el punto de vista epistémico en unas y cognitivo en otras. Este no es el lugar para hacer una comparación o posible articulación de estas teorías en sus diversos componentes; se trata de ejemplificar una estrategia de *networking*, basada en el análisis racional y posible hibridación de las herramientas conceptuales usadas en cada caso. Se deja fuera de discusión y articulación el sistema de resultados que los marcos teóricos hayan podido desarrollar.

Esta estrategia ha dado origen al denominado Enfoque Ontosemiótico (EOS) en Didáctica de la Matemática, en un intento de articulación de las mencionadas teorías y otras relacionadas desde una aproximación que describen como ontosemiótica. Las teorías se pueden concebir bajo una doble perspectiva:

1. En un sentido restringido, como “sistema de herramientas” (conceptos, principios y metodologías) que se usan para responder a un conjunto de cuestiones propias de un campo de indagación; esta interpretación puede ser similar a la tripleta propuesta en Radford (2008a) – Principios, Métodos y Cuestiones.
2. En un sentido ampliado, incluyendo además de los anteriores componentes, el “sistema de resultados” (saberes) que se van obteniendo como resultado de aplicar las herramientas a las cuestiones.

En principio, cualquier teoría puede producir conocimientos valiosos que ayudan a comprender el campo y actuar sobre el mismo de manera fundamentada. Pero las diversas teorías, pueden ser redundantes, contradictorias, insuficientes, o más o menos eficaces para realizar el trabajo pretendido. La clarificación, comparación y posible articulación de teorías se orienta, por tanto, a la elaboración de un sistema de herramientas conceptuales y metodológicas óptimo, que potencie la investigación en el campo. Se asume que tal articulación de teorías se puede hacer mediante el análisis racional de los elementos constituyentes de las teorías y la elaboración de *nuevas herramientas* conceptuales cuando la mera amalgama de las existentes no se considera posible o pertinente. Como trataré de mostrar esta estrategia de articulación ha dado origen a una nueva noción teórica para el análisis epistemológico, ontológico y cognitivo, la *configuración ontosemiótica* (Figura 1), que incorpora de manera híbrida elementos de las nociones de concepto, concepción, esquema, praxeología matemática y registro de representación semiótica.

3. Una primera etapa de articulación de teorías: Problemas epistemológicos, ontológicos y psicológicos en didáctica de la matemática

Aunque la didáctica de la matemática es una disciplina educativa y, por tanto, básicamente es una sociotecnología (Bunge, 1998), que debe buscar cómo mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es necesario que aborde previamente problemas de carácter científico, esto es, descriptivo, explicativo y predictivo. Como se describe en Godino et al. (2019) la didáctica de la matemática debe abordar los problemas epistemológicos: ¿Cómo emerge y se desarrolla la matemática?; ontológico: ¿Qué es un objeto matemático? ¿Qué tipos de objetos intervienen en la actividad matemática?; semiótico-cognitivo: ¿Qué es conocer un objeto matemático? ¿Qué significa el objeto para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?

Estas cuestiones han sido fundamentales en la didáctica francesa y sus respuestas han sido el punto de partida de la teoría de los significados y configuraciones ontosemióticas del EOS.

3.1. La noción de conocimiento en la didáctica francesa

La contribución teórica de Duval (1995) se inscribe dentro de la línea de indagación que postula una naturaleza mental (las representaciones internas) para el conocimiento matemático, y que atribuye un papel esencial al lenguaje en sus diversas manifestaciones en los procesos de formación y aprehensión de las representaciones mentales (noesis). Se considera imprescindible en la generación y desarrollo de los objetos matemáticos la disponibilidad y uso de diversos sistemas de representación semiótica, sus transformaciones y conversiones, pero la semiosis (producción y aprehensión de representaciones materiales) no es espontánea y su dominio debe ser un objetivo de la enseñanza. Una atención particular debe darse a la conversión entre registros de representación semiótica no congruentes entre sí. La semiótica cognitiva elaborada por Duval aporta otras nociones útiles para estudiar los fenómenos del aprendizaje matemático [tipos de funciones discursivas y meta-discursivas del lenguaje, diferenciación funcional y coordinación de registros, etc. (Duval 1996)].

La TCC (Vergnaud 1990; 2009) ha introducido un conjunto de nociones teóricas para analizar los procesos de construcción del conocimiento por parte de los aprendices. Esta es la razón por la que consideramos a este modelo teórico dentro del programa cognitivo, reconociendo, no obstante, que algunas nociones teóricas elaboradas (campo conceptual) tienen una naturaleza epistémica. La noción cognitiva básica para Vergnaud es la de esquema. El esquema se describe como "la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dadas" (Vergnaud 1990, p. 136). El autor indica que "es en los esquemas donde se deben investigar los conocimientos en acto del sujeto que son los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria". Cada esquema es relativo a una clase de situaciones cuyas características son bien definidas. Propone también una noción de concepto a la que parece atribuir una naturaleza cognitiva al incorporar en la misma los invariantes operatorios "sobre los que reposa la operacionalidad de los esquemas". Esta noción es distinta de lo que son los conceptos y teoremas en la ciencia, para los que no propone una conceptualización explícita. En cuanto a la noción de campo conceptual, en una primera descripción se entiende como "conjunto de situaciones". Pero a continuación aclara que junto a las situaciones se deben considerar también los conceptos y teoremas que se ponen en juego en la solución de tales situaciones.

Para la TSD el saber a enseñar tiene una existencia cultural, preexistente y, en cierta forma, independiente de las personas e instituciones interesadas en su construcción y comunicación. El análisis de los procesos de comunicación y reconstrucción de dichos saberes por el sujeto, bajo la forma de conocimientos, en el seno de los sistemas didácticos es el objetivo fundamental de la didáctica. La transposición didáctica, noción desarrollada en el marco de la TAD, da cuenta de las adaptaciones de estos saberes para su estudio en el contexto escolar, dando lugar a distintas variedades epistémicas de un mismo saber.

En cuanto a las nociones usadas en la TSD para referirse a los "conocimientos del sujeto" encontramos el uso de 'representación', en el sentido de representación interna; en otras ocasiones utiliza la expresión "modelos implícitos" para dichos conocimientos y representaciones. Se interpretan los modelos implícitos como "formas de conocimiento", las cuales "no funcionan de manera completamente independiente, ni de manera completamente integrada, para controlar las interacciones del sujeto.

La TAD se ha centrado hasta el momento, casi de manera exclusiva, en la dimensión institucional del conocimiento matemático. Las nociones de organización matemática y relación institucional al objeto se proponen como los instrumentos para describir la actividad matemática y los objetos institucionales emergentes de tal actividad. La dimensión cognitiva se describe en términos de la "relación personal al objeto", que se propone como sustituto, en cierta manera, de las nociones propuestas desde la psicología (concepción, intuición, esquema, representación interna, etc.). Pero esta noción de relación personal al objeto no ha sido desarrollada, al postularse como previa y verse como determinante de las mismas la caracterización de las praxeologías matemáticas y el estudio de las relaciones institucionales al saber.

3.2. Significado y configuraciones epistémica y cognitiva en el EOS

La breve síntesis presentada de las nociones usadas en las cuatro teorías para describir el conocimiento matemático, desde el punto de vista institucional (epistémico) – saber, campo conceptual, praxeología matemática, relación institucional al objeto, etc. y personal (cognitivo) – conocimiento, concepción, esquema, representación interna, modelo implícito, relación personal al objeto, etc. – muestra que la simple superposición, o el uso indiscriminado de las mismas para describir los fenómenos de transposición didáctica y de aprendizaje matemático solo puede crear confusión.

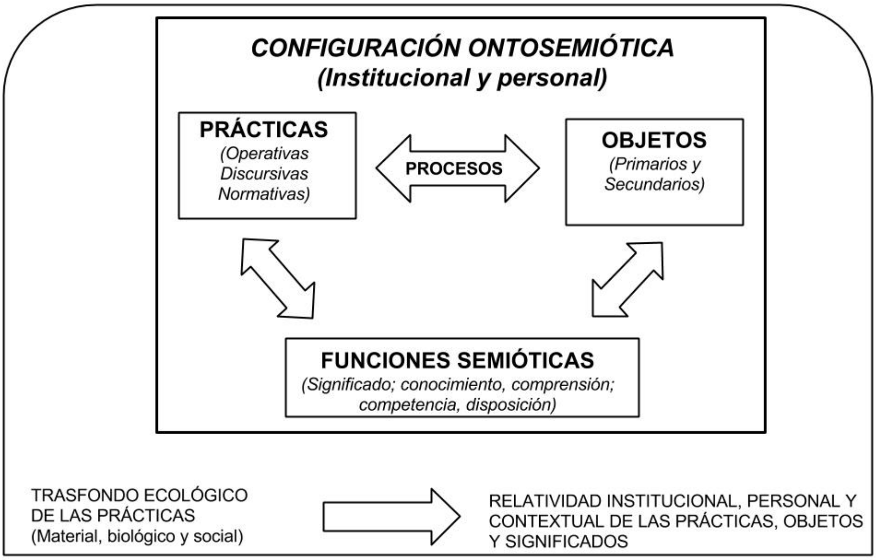
Esta es una de las razones por la que Godino y Batanero (1994) comenzaron a sentar las bases de un modelo ontológico, epistemológico y cognitivo relativo al conocimiento matemático sobre bases antropológicas, ontológicas y semióticas. Con un estilo que recuerda los trabajos de fundamentación axiomática de las matemáticas estos autores comenzaron definiendo las nociones primitivas de práctica matemática, institución, prácticas institucionales y personales, objeto institucional y personal, significado de un objeto institucional y personal, conocimiento y comprensión del objeto. Estas nociones fueron complementadas en trabajos posteriores (Godino 2002) con una tipología de objetos y procesos matemáticos primarios, así como con una interpretación de la noción de función semiótica (relación triádica entre dos objetos, antecedente y consecuente, según un criterio o regla de correspondencia) que permite elaborar una noción operativa de conocimiento (significado, comprensión y competencia) (Figura 1). Estas nociones pueden incluir a las correspondientes a los enfoques epistemológicos y cognitivos usadas en didáctica de la matemática, como se explica en Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006).

En la Figura 1 se destacan como elementos claves de la modelización epistemológica y cognitiva del conocimiento matemático que propone el EOS las nociones de práctica, objeto, proceso (secuencia de prácticas de las que emerge el objeto) y función semiótica (noción mediante la cual se relacionan las diversas entidades de manera referencial y operacional). Se puede pensar que con estos cuatro elementos se tiene una versión similar a la tripleta conceptual de la TCC, o a la de praxeología de la TAD. Sin embargo, en el

EOS se ha elaborado una tipología explícita de objetos (y de sus respectivos procesos) que permite realizar descripciones de la actividad matemática más analíticas y explicativas que las correspondientes a otros modelos teóricos.

Figura 1

Entidades primarias de la ontología y epistemología EOS



En concreto se propone que en las prácticas matemáticas intervienen los siguientes seis tipos de objetos: situaciones–problemas, lenguajes, conceptos (en su acepción de entidades que se definen),[2] procedimientos, proposiciones y argumentos. Además, estas entidades primarias se pueden contemplar desde cinco puntos de vista duales: personal – institucional; ostensivo–no ostensivo; extensivo–intensivo; unitario–sistemático; expresión–contenido (Godino, Batanero, & Font, 2007; Font, Godino, & Gallardo, 2013).

3.3. Concordancias y complementariedades

Las teorías mencionadas (RRS, TCC, TSD, TAD) dan un peso muy diferente al aspecto personal e institucional del conocimiento matemático y a su dependencia contextual. En el EOS se postula que los sistemas de prácticas y los objetos emergentes son relativos a los contextos de uso, a las instituciones en que tienen lugar las prácticas y a los sujetos implicados en las mismas

[2] Este uso de concepto–definición es diferente a concepto–sistema, que es el que modeliza la TCC. La noción de configuración ontosemiótica viene a modelizar al concepto entendido como sistema (tripleta conceptual).

(juegos de lenguaje y formas de vida, Wittgenstein 1953).

La descripción de los conocimientos de un sujeto individual sobre un objeto O se puede hacer de una manera global con la noción de “sistemas de prácticas personales”. Esta noción queda concretada mediante la trama de funciones semióticas que el sujeto puede establecer en las que O se pone en juego como expresión o contenido (significante, significado). Si en este sistema de prácticas distinguimos entre las que tienen una naturaleza operatoria o procedimental ante un tipo de situaciones–problemas, respecto de las discursivas, obtenemos un constructo que guarda una estrecha relación con la noción de praxeología (Chevallard, 1999), siempre y cuando le atribuyamos a dicha noción una dimensión personal, además de la correspondiente dimensión institucional.

Los modos de “hacer y de decir” ante ciertos tipos de problemas que ponen en juego, por ejemplo, el “objeto función” se proponen como respuesta a la pregunta “¿qué significa el objeto función?” para un sujeto (o una institución). Esta modelización semiótica del conocimiento permite interpretar la noción de esquema como configuración cognitiva asociada a un subsistema de prácticas, relativas a una clase de situaciones o contextos de uso, y las nociones de concepto–en–acto, teorema–en–acto y concepción, como componentes parciales constituyentes de dichas configuraciones cognitivas.

En el EOS la noción de concepción (en su versión cognitiva) es interpretada en términos de configuración ontosemiótica personal (que incluye los sistemas de prácticas personales, objetos, procesos y relaciones). En términos semióticos, cuando nos preguntemos por el significado de “concepción” de un sujeto sobre un objeto O (o sostenida en el seno de una institución) asignemos como contenido, “el sistema de prácticas operativas y discursivas que ese sujeto es capaz de manifestar y en las que se pone en juego el objeto”.[3] Dicho sistema es relativo a unas circunstancias y momento dado y se describe mediante la red de objetos y procesos que se ponen en juego.

Así mismo, la comprensión y el conocimiento se conciben en su faceta dual personal – institucional, involucrando, por tanto, los sistemas de prácticas operativas, discursivas y normativas ante ciertos tipos de tareas problemáticas. El aprendizaje de un objeto *O* por un sujeto se interpreta como la apropiación de los significados institucionales de *O* por parte del sujeto; se produce mediante la negociación, el diálogo y acoplamiento progresivo de significados.

En el EOS se ha elaborado una noción general de significado (Godino, Burgos, & Gea, 2021). El significado de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica y, por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, extensivo–intensivo, personal o institucional; puede referirse a un sistema de prácticas, o

[3] Esta es una interpretación creativa de la máxima pragmática de Peirce (1958).

a un componente (situación-problema, una notación, un concepto, etc.). La noción de sentido se interpreta como un significado parcial, esto es, se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinados.

Las nociones de representación y registro semiótico usadas por Duval y otros autores hacen alusión, según el EOS, a un tipo particular de función semiótica representacional entre objetos ostensivos y objetos mentales (no ostensivos). La noción de función semiótica generaliza esta correspondencia a cualquier tipo de objetos y, además, contempla otros tipos de dependencias entre objetos. Por ejemplo, la expresión ostensiva $y = 2x$ refiere a una función particular (entidad conceptual, no ostensiva). Entre ambas entidades se establece una función semiótica de tipo representacional.[4] En otras situaciones la función $y = 2x$ puede estar en representación de la clase de funciones polinómicas de primer grado, o del concepto general de función. Ahora el antecedente y el consecuente de la función semiótica son entidades conceptuales. La función matemática $y = 2x$ se puede usar para modelizar determinadas situaciones prácticas, por ejemplo, para determinar el coste de x kilos de manzanas cuyo coste unitario son 2 €. En este caso prevalece el uso o significado pragmático del concepto de función: lo que significa $y = 2x$ es el sistema de prácticas en que tal objeto participa.

El uso que se hace en la TSD de la noción de sentido, desde el punto de vista del EOS, queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y las distintas situaciones fundamentales de las cuales emerge el objeto, y "le da sus sentidos" (podemos describirlo como “significado situacional”). Según el EOS, esta correspondencia es, sin duda, crucial, al aportar la razón de ser de tal objeto, su justificación u origen fenomenológico. Pero también se tienen que tener en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre ese objeto y los restantes componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que consideramos sobreviene el objeto, entendido, bien en términos cognitivos, o bien en términos epistémicos.

La TCC extiende la noción de significado como “respuesta a una situación dada” introducida en TSD. Esta extensión supone la inclusión, además del componente situacional, de elementos procedimentales (esquemas) y discursivos (conceptos y teoremas) relacionando además el significado con la noción de modelo implícito. El contenido que se considera “significado de un objeto matemático para un sujeto” en la TCC es prácticamente la globalidad

[4] La noción de función semiótica, en su uso referencial, se entiende como la correspondencia entre un objeto antecedente (expresión, significante) y otro consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según un criterio o regla de correspondencia. El uso operacional o pragmático de la función semiótica indica el papel o rol que un objeto (antecedente) desempeña en una práctica matemática (consecuente) (Godino, Font, Wilhelmi, & Lurduy, 2011).

holística que en el EOS se describe como “sistema de prácticas personales”. Sin embargo, la noción de función semiótica y la ontología matemática asociada proporciona un instrumento más general y flexible para el análisis didáctico-matemático (Godino, Burgos, & Gea, 2021).

Un aspecto esencial que permite distinguir entre los modelos teóricos es el relativo a la dialéctica entre la dualidad institucional y personal, entre enfoques epistemológicos y cognitivos, los cuales con frecuencia se presentan disjuntos, dando lugar a posiciones extremas. En unos casos el acento se pone en la dimensión personal (TCC y RRS), en otros en la dimensión institucional (TAD y TSD), mientras que en el EOS se postula una relación dialéctica entre ambas dimensiones, por lo que pensamos puede ayudar a la articulación entre los restantes modelos teóricos.

4. Problemas educativos-instruccionales en didáctica de la matemática

En el marco del EOS se asume que para responder de manera científica a la problemática de qué matemáticas enseñar y cómo es necesario abordar las cuestiones generales de índole epistemológica, ontológica y psicológica mencionados anteriormente. Ello permite plantear de manera fundamentada las cuestiones propiamente didácticas, esto es, los problemas,

- Educativo-instruccional: ¿Qué es la enseñanza? ¿Qué es el aprendizaje? ¿Cómo se relacionan?
- Ecológico: ¿Qué factores condicionan y soportan el desarrollo de los procesos instruccionales y qué normas los regulan?
- Optimización del proceso de instrucción: ¿Qué tipo de acciones y recursos se deberían implementar en los procesos de instrucción para optimizar el aprendizaje matemático?
- Formación de profesores: ¿Qué conocimientos y competencias deberían tener los profesores para optimizar el aprendizaje en los procesos de instrucción en matemáticas?

En Godino et al. (2019) se describen los principios y herramientas metodológicas mediante los cuales se abordan estas cuestiones centrales de la investigación didáctica, entendida como campo de investigación científica y tecnológica. Con el enunciado conjunto de estas preguntas se muestra la complejidad de la optimización de los procesos de instrucción, ya que previamente se deben abordar estudios de índole epistemológica, ontológica, cognitiva, semiótica y ecológica.

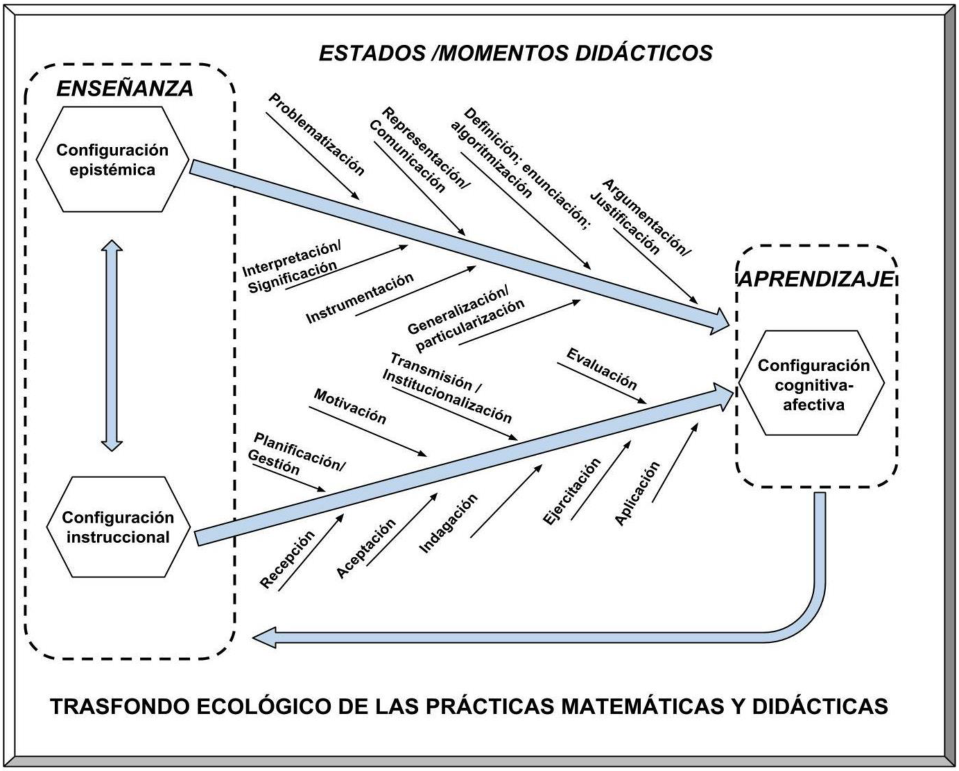
4.1. Teoría de las configuraciones didácticas

Para el análisis de los procesos de instrucción a nivel micro se ha elaborado en el EOS la herramienta *configuración didáctica* (Godino, Contreras, & Font, 2006). Se define como cualquier segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) comprendido entre el inicio y fin del proceso de resolución de una situación–problema. Incluye, por tanto, las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar la tarea. La Figura 2 resume los componentes y dinámica interna de las configuraciones didácticas, las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje y los principales procesos matemáticos ligados a la modelización ontosemiótica del conocimiento matemático. También se refieren algunos procesos didácticos ligados a la conexión entre las configuraciones instruccional y cognitivo–afectiva: planificación, motivación, institucionalización, evaluación, recepción, aceptación, indagación, ejercitación y aplicación. Otra herramienta metodológica para el análisis de la instrucción es la secuencia de configuraciones didácticas que constituye una *trayectoria didáctica*.

En toda configuración didáctica (Figura 2) se puede diferenciar tres componentes: a) una configuración epistémica (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos institucionales requeridos en la tarea), b) una configuración instruccional (sistema de funciones docentes, discentes y medios instruccionales que se utilizan, así como las interacciones entre los distintos componentes) y c) una configuración cognitiva-afectiva (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos personales que describe el aprendizaje y los componentes afectivos que le acompañan).

Figura 2

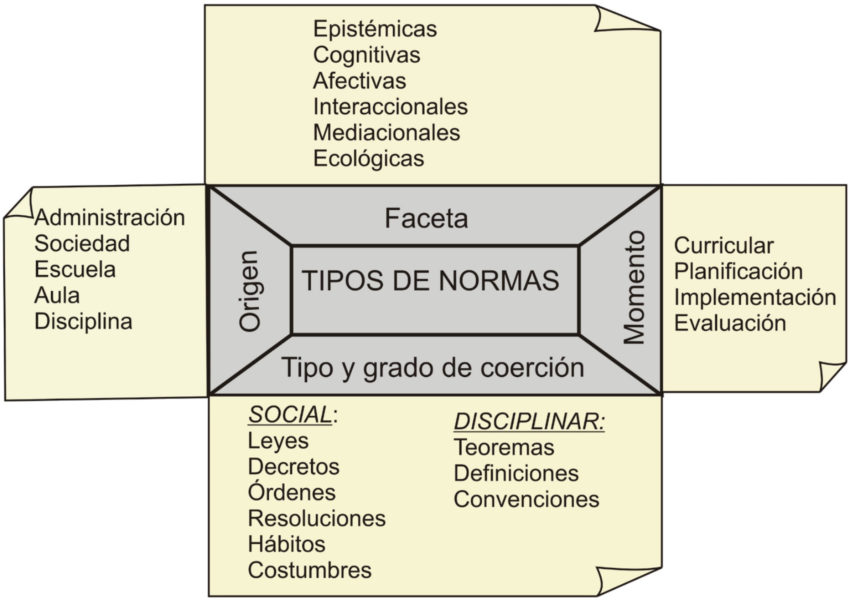
Componentes y dinámica de una configuración didáctica (Godino, 2014, p. 31)



4.2. Teoría de la dimensión normativa

Los factores y normas que regulan el proceso de enseñanza y aprendizaje han sido objeto de investigación en didáctica de las matemáticas; estas últimas principalmente por los autores que basan sus trabajos en el interaccionismo simbólico (Blumer, 1982). Se trata de tener en cuenta las normas, hábitos y convenciones, generalmente implícitos, que regulan el funcionamiento de la clase de matemáticas y que condicionan en mayor o menor medida los conocimientos que construyen los estudiantes. En Godino, Font, Wilhelmi y De Castro (2009) se aborda el estudio sistemático y global de estas nociones teóricas desde la perspectiva del EOS, tratando de identificar sus conexiones y complementariedades, y reconocer nuevos tipos de normas que faciliten el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Figura 3).Tanto los factores como las normas pueden referirse a las seis facetas que se deben tener en cuenta en el análisis de los procesos de instrucción: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica.

Figura 3
Tipos de normas (Godino, 2014, p. 38)



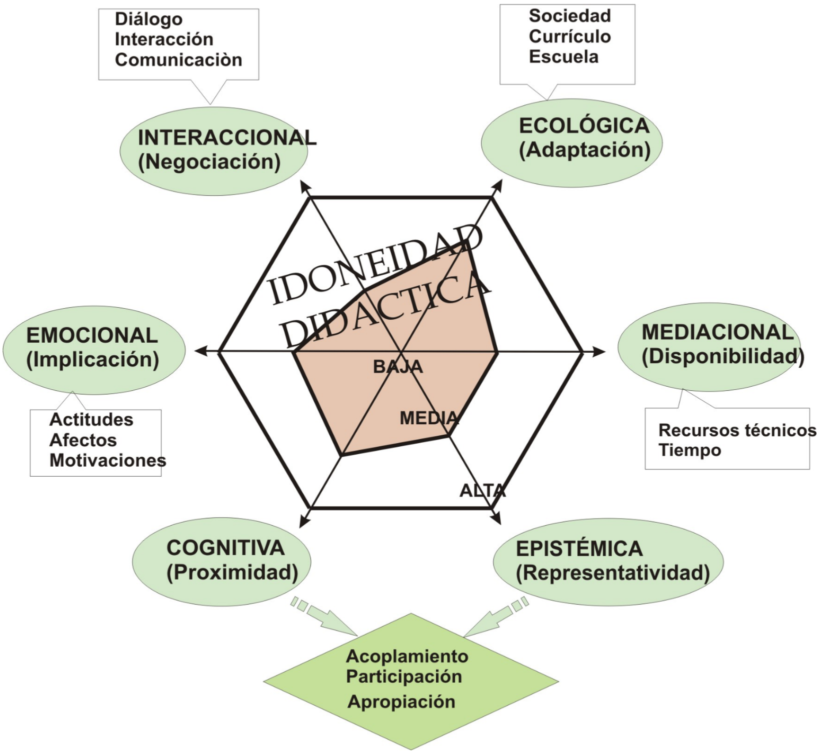
4.3. Teoría de la idoneidad didáctica

En el sistema teórico que configura el EOS se ha incluido la noción de *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática (Godino et al., 2007; Godino, 2013). Se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Esto supone la articulación coherente y sistémica de seis facetas: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Figura 4).

Se parte de la base de que en las ciencias sociales y educativas es posible formular criterios de idoneidad, en la forma de juicios de valor, “Se debería hacer esto y no aquello”, en aquellas circunstancias en que dichos juicios de valor tienen carácter social y es posible explicitar un fundamento para su formulación. Conllevan una racionalidad, por lo que pueden ser objeto de escrutinio científico (Bunge, 1999; Rugina, 1998).

Figura 4

Idoneidad didáctica (Godino, 2013, p. 116)



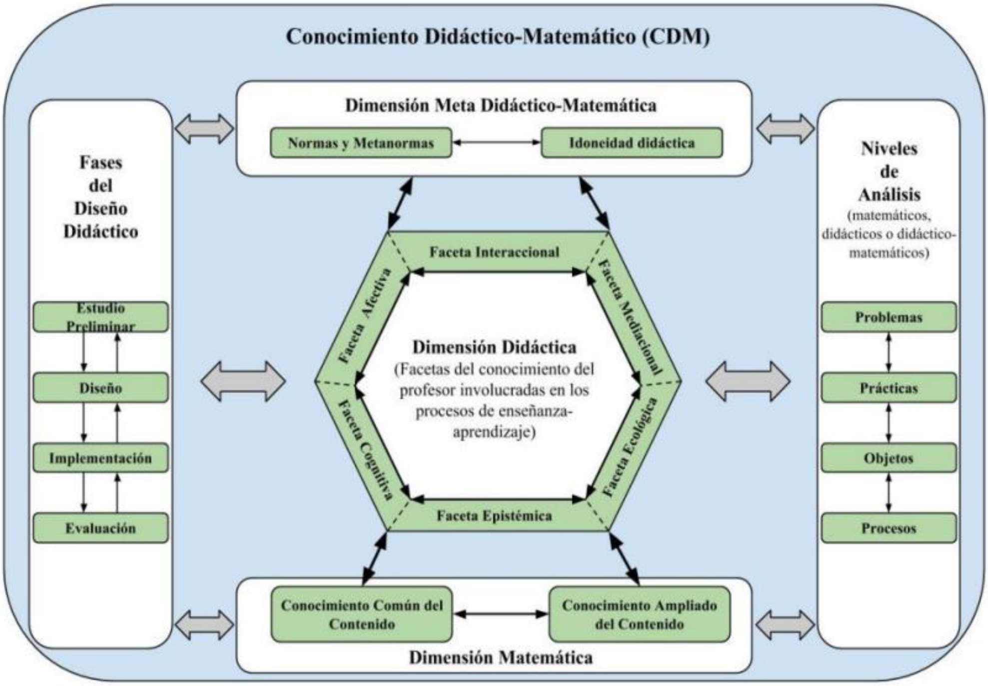
4.4. Formación de profesores: El modelo CCDM

La investigación en didáctica de las matemáticas como campo científico y tecnológico debe abordar el problema de la formación de profesores, como un medio fundamental de incidir sobre la práctica educativa. En consecuencia, se debe abordar la cuestión,

En el marco del EOS se ha desarrollado un modelo de conocimientos didáctico-matemáticos para la formación de profesores (Godino, 2009; Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017). La Figura 5 resume las dimensiones matemática, didáctica y meta-didáctica (D'Amore, Font, & Godino, 2007) que se deben tener en cuenta en dicho modelo, las fases del diseño didáctico (estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación), las facetas (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica) y los niveles de análisis (problemas, prácticas, objetos y procesos). Este sistema de elementos proporciona criterios para categorizar los conocimientos didáctico-matemáticos que deben tener en cuenta los planes de formación de profesores de matemáticas.

Figura 5

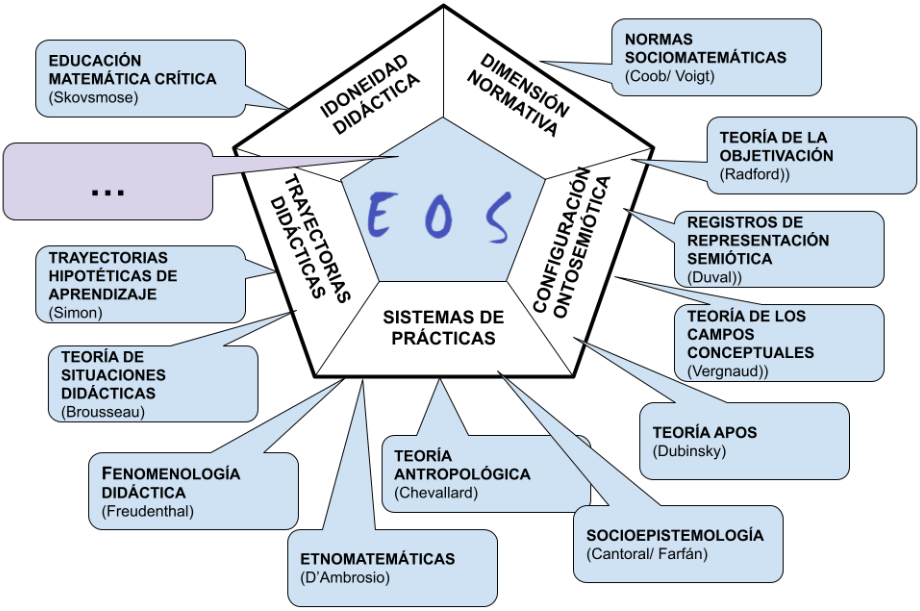
Dimensiones y componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) (Pino-Fan & Godino, 2015, p. 103)



5. Segunda etapa de hibridación de teorías: Otros trabajos de articulación de marcos teóricos desde la perspectiva del EOS

En la Figura 6 se indica que las herramientas aportadas por el EOS se agrupan en cinco módulos o teorías parciales: Teoría del significado pragmático (sistema de prácticas operativas, discursivas y normativas); Teoría de las configuraciones ontosemióticas (tipos de objetos y procesos y dualidades epistémico-cognitivas); Teoría de las trayectorias didácticas; Teoría de la dimensión normativa; Teoría de la idoneidad didáctica. Se menciona en dicho diagrama un conjunto de teorías usadas en educación matemática conectadas con los distintos módulos del EOS. No se pretende indicar que dichas teorías están incluidas en el EOS, sino que cada una de las teorías parciales del EOS guarda un 'parecido de familia' con dichas teorías y que, en cierto sentido, podrían ser 'acomodadas' en el EOS con adaptaciones más o menos intensas en algunos de los presupuestos y métodos de las teorías implicadas.

Figura 6
Asimilación y acomodación de teorías



Este trabajo de asimilación y acomodación de teorías se ha iniciado en diversos artículos, aunque sin duda no se puede dar por concluido. En la sección 3 he descrito cómo las nociones de significado pragmático de un objeto matemático, configuración epistémica y cognitiva de objetos y procesos emergieron con la pretensión de articular nociones epistemológicas y cognitivas usadas en la didáctica francesa. Este trabajo de articulación se inició en Godino y Batanero (1994) y fue ampliado en Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006) y D'Amore y Godino (2007), donde se presenta el EOS como un desarrollo de la TAD.

El papel de las representaciones internas y externas en el aprendizaje de las matemáticas es un tema que ha sido objeto de atención por diversos autores (Goldin, 2002). Los trabajos de Duval (2006) están relacionados también con esta problemática. Esta cuestión se aborda en el EOS al incluir el lenguaje, en sus diferentes registros, como uno de los elementos de las configuraciones ontosemióticas en interacción con los restantes tipos de entidades. Varios artículos han sido publicados donde abordamos la articulación del EOS con estas teorías (Font, Godino, & Contreras, 2008; Godino & Font, 2010; Godino, Wihelmi, Blanco, Contreras, & Giacomone, 2016; Pino-Fan, Guzmán, Font, & Duval, 2015).

La teoría APOS (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) desarrollada por Dubinski y colaboradores (Dubinski, 1991; Cottrill et al., 1996) ha sido objeto de análisis y comparación con el EOS en varios trabajos publicados por Font y colaboradores. En Font, Trigueros, Badillo y Rubio (2015) se compara y contrasta la manera en que se conceptualiza la noción de objeto matemática en la teoría APOS y el EOS. Como contexto de reflexión, se diseña una descomposición genética APOS para la derivada y se analiza desde el punto de vista del EOS. Los resultados de este estudio muestran algunos puntos en común y algunos vínculos entre estas teorías y señalan la naturaleza complementaria de sus construcciones. En Borji, Font, Alamolhodaei y Sánchez (2018) se analiza la comprensión de los estudiantes universitarios sobre la gráfica de una función y su derivada aplicando APOS y EOS.

Las nociones de contrato didáctico, norma social y sociomatemática son claves en distintas teorías didácticas, siendo diversa su conceptualización y ámbito de aplicación (Brousseau, 1988; Yackel & Cobb, 1996). En Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) hacemos una síntesis de los variados modos de entender el contrato didáctico y las normas en didáctica de las matemáticas, y desarrollamos una perspectiva que integra estas nociones, como parte de la «dimensión normativa de los procesos de estudio». La consideración de esta perspectiva, desde un enfoque ontosemiótico, da lugar a una categorización de las normas según la faceta de los procesos de estudio a la que se refieren las normas: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica. Finalmente, mostramos cómo la aplicación de los criterios de idoneidad didáctica de un proceso de estudio se integra junto a las normas matemáticas, sociales y sociomatemáticas en la dimensión normativa, incorporando una racionalidad axiológica en el análisis didáctico.

Comprender en profundidad los procesos de aprendizaje de los alumnos es uno de los principales retos de la investigación en educación matemática para lo cual se dispone de diferentes lentes teóricas. La cuestión es cómo se comparan y contrastan estas diferentes lentes, y cómo pueden coordinarse y combinarse para proporcionar una visión más completa sobre el tema de estudio. Para investigar esto, en Drijvers, Godino, Font y Trouche (2013), se analiza un episodio de clase con dos lentes teóricas, la perspectiva de génesis instrumental y el EOS. Los resultados de este análisis conjunto proporcionan una visión rica de los fenómenos observados y ayudan a identificar las posibilidades y limitaciones de cada uno de los dos enfoques teóricos y a articularlos.

El dilema entre modelos didácticos centrados en el estudiante (indagativos-constructivistas) o en el profesor (transmisivos-objetivistas) es abordado en el marco del EOS en diversos artículos (Godino, Rivas, Burgos, & Wilhelmi, 2019; Godino, Burgos, & Wilhelmi, 2020; Godino & Burgos, 2020). Teniendo en cuenta la complejidad ontosemiótica del conocimiento matemático se argumenta a favor de un modelo didáctico híbrido que requiere entretejer de manera dialéctica y compleja los momentos de transmisión del conocimiento con los momentos de indagación del estudiante. La implementación de trayectorias didácticas idóneas, implica la articulación de diversos tipos de configuraciones didácticas gestionadas por el profesor mediante criterios de idoneidad, los cuales deben tener en cuenta las dimensiones epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional.

En Godino, Beltrán-Pellicer y Burgos (2020) abordamos el problema de la articulación de la Teoría de la Objetivación (TO) (Radford, 2008b; 2014) y el EOS. Como primera aproximación al problema, se describen los principios y conceptos básicos de ambas teorías y se identifican algunas concordancias y complementariedades. Para contextualizar la reflexión se usa el informe de una investigación empírica sobre interpretación de un gráfico cartesiano que representa el movimiento relativo, planteada en el marco de la TO. Aunque ambas teorías comparten principios socioculturales sobre la naturaleza de las matemáticas y los procesos de aprendizaje, este ejemplo permite reconocer el diferente énfasis que ponen ambos enfoques en el análisis de las dimensiones epistemológica, ontológica y semiótico-cognitiva, y las implicaciones de estas diferencias sobre la dimensión instruccional. Fandiño Pinilla (2020) analiza algunos puntos de contacto y divergencias entre TAD, TSD, EOS y TO. Sin duda, el encomiable esfuerzo iniciado en este artículo de encontrar similitudes entre estas teorías deberá ser continuado, profundizando en la clarificación de las identidades, límites y razón de ser de cada una de ellas.

En Rodríguez-Nieto, Font, Borji, & Rodríguez-Vásquez (2021) se presenta un trabajo de articulación de la Teoría Extendida de las Conexiones Matemáticas (ETC) y el Enfoque Ontosemiótico (OSA). Se identifican concordancias y complementariedades en las respectivas concepciones de las conexiones matemáticas, como resultado de aplicar estos marcos teóricos al protocolo de respuesta de un estudiante al resolver una tarea sobre la derivada. En primer lugar, se identificaron las conexiones matemáticas desde la perspectiva de la ETC y, en segundo lugar, se realizó un análisis ontosemiótico en el que se analizaron las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos primarios activados en ellas y las funciones semióticas establecidas entre estos objetos. La principal conclusión es que ambas teorías se complementan para realizar un análisis más detallado de las conexiones matemáticas. En particular, el análisis más detallado realizado con las herramientas del EOS, visualiza una conexión matemática como la punta de un iceberg de un conglomerado de prácticas, procesos, objetos primarios activados en estas prácticas y las funciones semióticas que los relacionan.

Sobre la problemática de la formación de profesores, en Godino (2009) se comienza a desarrollar el modelo de conocimientos didáctico-matemáticos (modelo CDM) del profesor de matemáticas, revisado y ampliado en Pino-Fan y Godino (2015) y en Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017). Se parte de la bibliografía existente sobre el tema, en particular del modelo de conocimiento del profesor propuesto por Shulman (Shulman, 1986; 1987) y las adaptaciones realizadas por diversos autores al campo de la educación matemática, en particular del modelo MKT (Ball, 2000; Ball, Lubienski, &

Mewborn, 2001). Tras identificar algunas limitaciones en los modelos considerados proponemos un modelo que comprende categorías de análisis más finas de los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor, basado en la aplicación de las herramientas del EOS.

6. Reflexiones sobre la hibridación y competición de marcos teóricos

Como hemos indicado, con el EOS no se trata de construir una "teoría holística, que lo explique todo", sino de avanzar en la construcción de un sistema de herramientas conceptuales y metodológicas que permitan hacer los análisis de nivel macro y micro de las dimensiones epistémica, ontológica, cognitiva, instruccional y ecológica implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como las interacciones entre las mismas. En el caso de las nociones epistémicas y cognitivas analizadas en la sección 3 se ha considerado que la mera superposición o amalgama de herramientas teóricas no es posible, dada su heterogeneidad y parcialidad, por lo que se ha procedido a la elaboración de una nueva entidad con un claro carácter híbrido. El constructo teórico configuración ontosemiótica (Figura 1) guarda un "parecido de familia" con las nociones de concepto, concepción, registro de representación semiótica, saber, conocimiento, praxeología matemática, pero no es reducible a ninguna de ellas, por lo que requiere una designación específica. Los autores consideran que esta noción puede hacer más eficaz el trabajo de las nociones matrices, al permitir analizar al nivel macro y micro la actividad matemática institucional y personal, y comprender mejor las relaciones entre ambas dimensiones del conocimiento matemático. Esta afirmación requiere, no obstante, un trabajo analítico y experimental más profundo que el realizado en esta breve presentación y el aportado en Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006).

Es claro que las nuevas entidades introducidas en el EOS entran en competición con las ya existentes, teniendo ante sí el difícil problema de probar su eficacia relativa para resolver las cuestiones paradigmáticas del campo. Es necesario avanzar en la comparación de los resultados que se puedan obtener con los marcos teóricos matrices y los nuevos constructos emergente, lo que constituirá la prueba de su posible supervivencia.

Aunque la articulación con otros marcos teóricos ha sido un tema central del EOS, como se refleja en las publicaciones realizadas, no obstante es necesario continuar con esta problemática, analizando las concordancias y complementariedades como fuente de mutuo enriquecimiento. No obstante, en este ámbito encontramos una dificultad crítica. La perspectiva holística del EOS, su carácter sistémico e inclusivo basado en la asunción de presupuestos no solo ontosemióticos, sino también pragmatistas, antropológicos y socioculturales, plantea una dificultad en su relación con otros marcos teóricos. Parece natural, desde el punto de vista ecológico-social, que cualquier marco teórico, por ejemplo, la Etnomatemática (D'Ambrosio, 1985; Oliveras & Godino, 2015) o la Socioepistemología (Cantoral, Reyes-Gasperini, & Montiel, 2014), defiendan su propia identidad ante los intentos de asimilación y acomodación por el EOS (Godino, 2017).

El análisis ecológico esbozado de las nuevas ideas emergentes se debe complementar con el análisis sociológico correspondiente (Grugeon-Allys, Godino, & Castela, 2016); no es suficiente haber generado una nueva entidad híbrida potencialmente fuerte, es necesario que se den las circunstancias sociales y materiales para su desarrollo. Es necesario atraer a jóvenes investigadores que se involucren en el estudio, comprensión y aplicación de los nuevos instrumentos, y lograr atraer los recursos necesarios para realizar las investigaciones, comunicar, discutir y publicar los resultados.

Reconocimiento

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2019-105601GB-I00, con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

Referencias bibliográficas

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*(3), 241–247.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433–456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Cham: Springer International Publishing.

Blumer, H. (1982). *El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método.* Barcelona: Hora.

Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., & Sánchez, A. (2018). Application of the complementarities of two theories, APOS and OSA, for the analysis of the university students' understanding on the graph of the function and its derivative. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(6), 2301–2315.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309–336.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 91–116.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73–112.

Chevallard, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221–266.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behaviour, 15*(2), 167–192.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer, A. P.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 5*(1), 44–48.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma, 28*(2), 49–77.

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(2), 191–218.

Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V., & Trouche, L. (2013). One episode, two lenses: A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 23–49.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 349–382.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103–131.

Fandiño Pinilla, M. I. (2020). A proposito di relazioni fra teorie: Alcuni punti di contatto e altri di divergenza fra TAD, TSD, EOS e TO. *La matematica e la sua didattica, 28*(2), 159–197.

Font, V., Godino, J. D., & Contreras, A. (2008). From representation to onto-semiotic configurations in analysing mathematics teaching and learning processes. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 157–173). Rotterdam: Sense Publishers.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97–124.

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., & Rubio, N. (2015). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 107–122.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática.

Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22(2-3), 237–284.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13–31.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111–132.

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: Motivación, supuestos y herramientas teóricas. http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Godino, J. D. (2017). Articulación de teorías socio-culturales en educación matemática desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. Conferencia plenaria. *RELME 31*, Lima, Perú. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/JDGodino_Conferencia_RELME31

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D. Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, *39*(1-2), 127–135.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., & Burgos, M. (2020). Concordancias y complementariedades entre la teoría de la objetivación y el enfoque ontosemiótico. *RECME: Revista Colombiana de Matemática Educativa, 5*(2), 51–66.

Godino, J. D., & Burgos, M. (2020). ¿Cómo enseñar las matemáticas y las ciencias experimentales? Resolviendo el dilema de la indagación y transmisión. *Revista Paradigma, 41,* 80–106.

Godino, J. D., Burgos, M., & Gea, M. (2021). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino_Burgos&Gea_Theories_of_meaning_2021.pdf

Godino, J. D., Burgos, M., & Wilhelmi, M. R. (2020). Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático: Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(1), 147–164.

Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39–88.

Godino, J. D., & Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 9*(1), 189–210.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A., & Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 117–150.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de la matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59–76.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 247–265.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90–113.

Godino, J. D., Rivas, H., Burgos, M., & Wilhelmi, M. D. (2019). Analysis of didactical trajectories in teaching and learning mathematics: overcoming extreme objectivist and constructivist positions. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(1), 147–161.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A., & Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 91–110.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In Lyn D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197–218). London: Lawrence Erlbaum

Grugeon-Allys, B., Godino, J. D., & Castela, C. (2016). Three perspectives on the issue of theoretical diversity. In A. Kuzniak, B. R. Hodgson, & J.-B. Lagrange (Eds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues* (pp. 57–86). Berlin: Springer.

Oliveras, M. L., & Godino, J. D. (2015). Comparando el programa etnomatemático y el enfoque ontosemiótico: Un esbozo de análisis mutuo. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 8*(2), 432–449.

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA, 36*(1), 87–109.

Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V., & Duval, R. (2015). The theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: linking looks for the study of mathematical understanding. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Ed.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33–40). Hobart, Australia: PME.

Prediger S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM - Mathematics Education*, *40*(2), 165–178.

Peirce, Ch. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce.* 1931–1935. Cambridge, MA: Harvard UP.

Radford, L. (2008a). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM - Mathematics Education*, *40*(2), 317–327.

Radford, L. (2008b). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 215–234). Sense Publishers.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de*

Etnomatemática, *7*(2), 132–150.

Rodríguez-Nieto, C. A, Font, V., Borji, V., & Rodríguez-Vásquez, M. (2021). Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071

Rugina, A. N. (1998). The problem of values and value-judgments in science and a positive solution: Max Weber and Ludwig Wittgenstein revisited. *International Journal of Social Economics, 25*(5), 805–854.

Ruthven, K. (2014). From networked theories to modular tools? In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 267–279). Springer International Publishing.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–22.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2-3), 133–170.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development, 52*(2), 83–94.

Wittgenstein, L. (1973). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458–477.